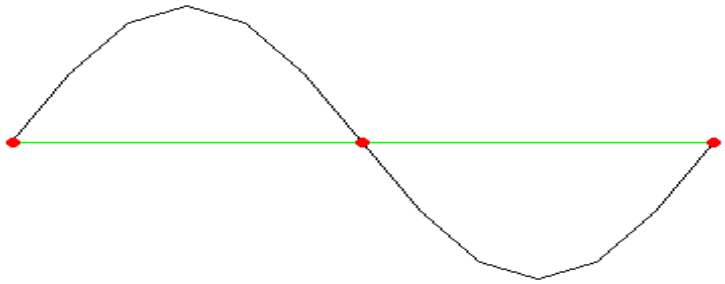
Traitement du signal

Théorème de Shannon

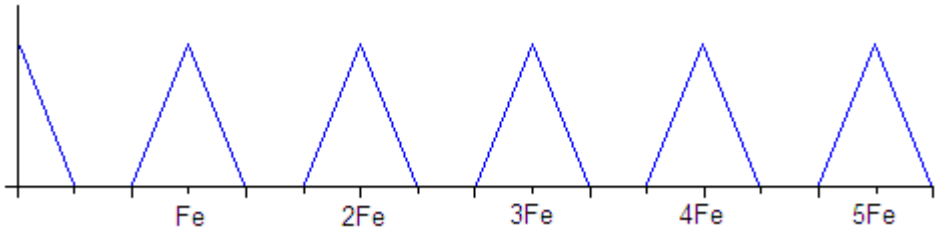
La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale à numériser : Fe > 2F_max

Dans l'exemple ci dessous on voit qu'avec deux échantillons par période (espacés de 180°), on ne peut pas reconstituer le signal. Mais avec trois ou quatre, on peut tracer un sinus passant par ces points...



Spectre d'un signal échantillonné

Le signal e(t) échantillonné par un peigne Dirac s'écrit $e^*(t) = e(t).\Sigma\ \delta(t - nTe)$
La transformée de Fourier donne le spectre $E^*(f) = Fe.\Sigma\ E(f - kFe)$
Le spectre de E(f) est donc recopié à chaque multiple de Fe

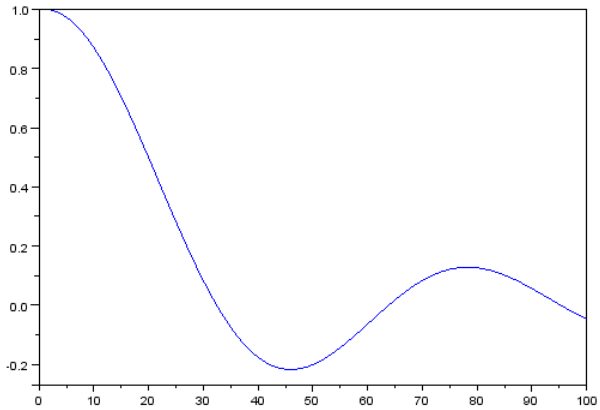


Le recouvrement spectral doit être évité : Fe – F_max > F_max soit Fe > 2F_max
Ce qui confirme le théorème de Shannon.

Spectre du signal de sortie d'un CNA

Si le signal échantillonné par un peigne de dirac a un spectre $E^*(f)$:
Le signal de sortie d'un convertisseur numérique/analogique a un spectre $Te.E^*(f).\text{sinc}\ (\pi f/fe)$.

sinc (x) est un sinus cardinal qui vaut sin(x)/x. Ce graphe représente sinc(x/10) :



sinc(0) = 1 tandis que sinc(nπ) = 0 donc les fréquences proches de nfe sont très atténuées (avec n entier non nul). Le fait d'augmenter fe permet d'élargir la bande passante pour le signal utile.

Dérivées numériques

Dérivée première

$A' = dA/dt = [A(\tau) - A(0)] / \tau$.

τ étant la durée entre 2 échantillons.
$A(n\tau)$ sera noté An. A(0) sera noté A.

Pour respecter le gain, le quantum devra être le même pour le CAN d'entrée et le CNA de sortie.
Les convertisseurs sont présentés en annexe.

Les deux formules suivantes peuvent être utilisées :

- $A' = [A - A_{-1}] / \tau$
- $A' = [A_{+1} - A_{-1}] / (2\tau)$.

La 1ère formule est entachée d'une erreur de ½ τ.
La 2ème se calcule sur une durée double, donc l'aspect local de la dérivée n'est pas bien respecté.

Dérivée seconde

$A'' = [A'(½) - A'(-½)] / \tau$
$A'' = [(A_{+1} - A) - (A - A_{-1})] / \tau^2$
$A'' = [A_{+1} - 2A + A_{-1}] / \tau^2$

ex : $A(t) = t^2$ se dérive en 2t qui se dérive en 2.
$A'' = [A(\tau) + A(-\tau)] / \tau^2 = (\tau^2 + \tau^2) / \tau^2$, ce qui fait bien 2.

Dérivée troisième

$A''' = (A''_{+1} - A''_{-1}) / (2\tau)$
$A''' = [(A_{+2} - 2A_{+1} + A) - (A - 2A_{-1} + A_{-2})] / (2\tau^3)$
$A''' = [A_{+2} - 2A_{+1} + 2A_{-1} - A_{-2}] / (2\tau^3)$

ex : $A = t^3$ se dérive en $3t^2$ qui se dérive en 6t qui se dérive en 6.
$A''' = [A(2\tau) - 2A(\tau) + 2A(-\tau) - A(-2\tau)] / (2\tau^3)$
$A''' = [(2\tau)^3 - 2\tau^3 + 2(-\tau)^3 - (-2\tau)^3] / (2\tau^3)$
$A''' = (8 - 2 - 2 + 8) / 2$, ce qui fait bien 6.

Dérivée troisième avec 4 échantillons

$A''' = (A''_{+1} - A'') / \tau$
$A''' = [(A_{+2} - 2A_{+1} + A) - (A_{+1} - 2A + A_{-1})] / \tau^3$
$A''' = [A_{+2} - 3A_{+1} + 3A - A_{-1}] / \tau^3$

ex : $A = t^3$ se dérive en $3t^2$ qui se dérive en 6t qui se dérive en 6.
$A''' = [A(2\tau) - 3A(\tau) + 3(0) - A(-\tau)] / \tau^3$
$A''' = [(2\tau)^3 - 3\tau^3 - (-\tau)^3] / \tau^3 = 8 - 3 + 1$, ce qui fait bien 6.

Implémentation des retards dans un logiciel

On commence par écraser la valeur la plus ancienne : $A_{-2} = A_{-1}$.
Puis $A_{-1} = Ao$, puis $Ao = A_{+1}$, puis $A_{+1} = A_{+2}$.
Enfin on met à jour A_{+2} par le dernier échantillon disponible.
Ainsi on dispose en permanence des 5 dernières valeurs...

Filtre à réponse impulsionnelle infinie

Le filtre reçoit des échantillons E en entrée, et fournit des échantillons S en sortie.
Ce type de filtre est caractérisé par la présence de valeurs antérieures de S dans l'équation du filtre.

Par exemple l'intégrateur : $S = E/j\omega\tau$, c'est à dire $j\omega\tau S = E$, avec τ = constante de temps.
La traduction temporelle donne $\tau dS/dt = E$ qui se traduit par $\Delta S = E\Delta T/\tau$ ou par $S = S_{-1} + E\Delta T/\tau$.

Plus généralement, pour les divers filtres RII, on part de l'équation différentielle.
Celle-ci peut souvent être retrouvée en remplaçant les $j\omega$ de l'équation fréquentielle par des d/dt.

Passe-bas du 2ème ordre :

Équation différentielle :

$\hat{S}/\omega_0^2 + 2m\acute{S}/\omega_0 + S = E$ (Gain unitaire pour f << fc), avec $\acute{S}$ la dérivée de S et $\hat{S}$ la dérivée seconde.

Équation de récurrence :

A partir de maintenant τ sera la période de récurrence (ex : 16 récurrences par échantillon).
Il suffit de remplacer les dérivées par leur expression numérique :

$[(S - S_{-1}) - (S_{-1} - S_{-2})]/(\omega_0\tau)^2 + 2m[S - S_{-1}]/(\omega_0\tau) + S = E$
$[1/(\omega_0\tau)^2 + 2m/(\omega_0\tau) + 1]S = -S_{-2}/(\omega_0\tau)^2 + [2/(\omega_0\tau)^2 + 2m/(\omega_0\tau)]S_{-1} + E$

On remarquera que la somme des coefficients de droite est égale au coefficient de S (si possible 2^n).
$S_{-2}=S_{-1}=S \Rightarrow S=E$

Passe-haut du 2ème ordre :

Équation différentielle :

$\hat{S}/\omega_0^2 + 2m\acute{S}/\omega_0 + S = \hat{E}/\omega_0^2$

Équation de récurrence :

$[1/(\omega_0\tau)^2 + 2m/(\omega_0\tau) + 1]S = -S_{-2}/(\omega_0\tau)^2 + [2/(\omega_0\tau)^2 + 2m/(\omega_0\tau)]S_{-1} + [E - 2E_{-1} + E_{-2}]/(\omega_0\tau)^2$

Passe-bande :

Équation différentielle :

$\hat{S}/\omega_0^2 + 2m\acute{S}/\omega_0 + S = 2m\acute{E}/\omega_0$

Équation de récurrence :

$[1/(\omega_0\tau)^2 + 2m/(\omega_0\tau) + 1]S = -S_{-2}/(\omega_0\tau)^2 + [2/(\omega_0\tau)^2 + 2m/(\omega_0\tau)]S_{-1} + 2m[E - E_{-1}]/(\omega_0\tau)$

Simulation d'un passe-bas

Caractéristiques du signal :

- 3 échantillons par période
- T=24 ($\omega = 0{,}2618$)

Caractéristiques du filtre :

- τ=1, 8 récurrences par échantillon
- butterworth du 4ème ordre (2m = 0,7654 et 2m = 1,8478)
- $\omega o = \pi/8$ (fréquence de coupure proche de Shannon).

Particularité du signal par rapport au filtre : 24 récurrences par période.

Code scilab :

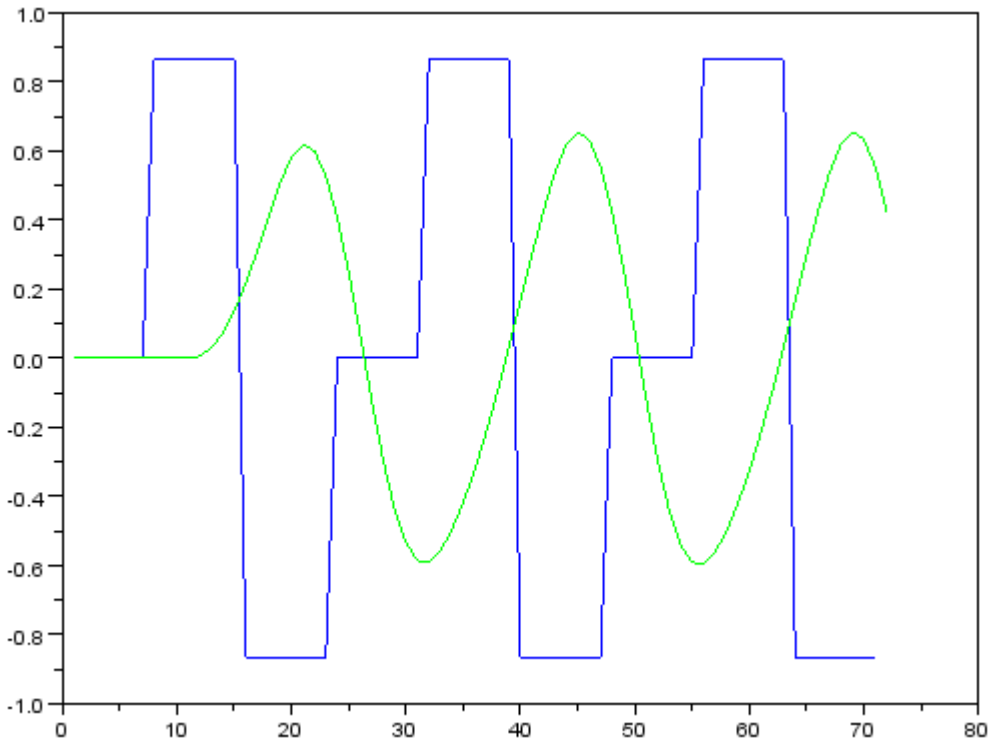
```
x = [0,0,0,0,0,0,0,4,4,4,4,4,4,4,4, ... ,32,32,32]
e = sind (30*x)

y(1)=0
y(2)=0
for n=1 : 70
y(n+2)= (14.92*y(n+1) – 6,485*y(n) + e(n)) / 9.435
end

s(1)=0
s(2)=0
for n=1 : 70
s(n+2)= (17.675*s(n+1) – 6.485*s(n) + y(n)) / 12.19
end

plot(e)
plot(s,'g')
```

Résultat



En bleu, les échantillons. En vert, le signal filtré : Le signal met une période pour se stabiliser...

Filtre à réponse impulsionnelle finie

Ce type de filtre est caractérisé par l'absence de valeurs antérieures de S dans l'équation du filtre.
S = Σ Ei permet de faire la moyenne des derniers échantillons. Te est la période d'échantillonnage.

Moyenne mobile de 2 échantillons successifs :

$Y = (X + X_{-1}) / 2$

X est en retard de θ sur X_{-1} avec $\theta = \omega Te$ donc on obtient $H = [1+\exp(-j\omega Te)] / 2$

$H = ½ \exp(-j\omega Te /2) [\exp(j\omega Te /2) + \exp(-j\omega Te /2)] = \exp (-j\omega Te /2) . \cos (\omega Te /2)$

$|H| = |\cos (\omega Te /2)| = |\cos (2\pi F.Te/2)| = |\cos (\pi F/Fe)|$

Fréquence de coupure $\Rightarrow |H| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow (\pi F/Fe) = \pi/4 \Rightarrow Fc = Fe/4$

Moyenne mobile de 3 échantillons successifs :

$Y = (X + X_{-1} + X_{-2}) / 3$

$H = [1+\exp(-j\omega Te)+\exp(-2j\omega Te)] / 3$

$H = \exp(-j\omega Te) [\exp(j\omega Te) + 1 + \exp(-j\omega Te)] /3 = \exp (-j\omega Te) . [1 + 2\cos (\omega Te)] /3$

$|H| = |1+2\cos (\omega Te)|/3 = |1+2\cos (2\pi F/Fe)|/3$

Fréquence de coupure $\Rightarrow |H| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \cos(2\pi F/Fe) = ¼ (-2+3\sqrt{2}) \Rightarrow Fc = 0,155.Fe$

Moyenne mobile de 4 échantillons successifs :

$Y = (X + X_{-1} + X_{-2} + X_{-3}) / 4$

$H = [1+\exp(-j\omega Te)+\exp(-2j\omega Te)+\exp(-3j\omega Te)] / 4$

$H = \exp(-3j\omega Te/2) [\exp(3j\omega Te/2)+\exp(j\omega Te/2)+\exp(-j\omega Te/2)+\exp(-3j\omega Te/2)] /4$

$H = \exp (-3j\omega Te/2) . [\cos (\omega Te/2)+\cos (3\omega Te/2)] /2$

$|H| = |\cos (\omega Te/2)+\cos (3\omega Te/2)|/2 = |\cos (\pi F/Fe)+\cos (3\pi F/Fe)|/2$

Fréquence de coupure $\Rightarrow |H| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \cos (\pi F/Fe)+\cos (3\pi F/Fe) = \sqrt{2} \Rightarrow Fc \approx Fe / 9.$

Application du filtre moyenneur RIF

Faire la somme de 4^n échantillons permet d'obtenir un résultat avec 2n bits supplémentaires, dont n bits non significatifs. Il en résulte un gain de n bits sur la précision.

Le bruit de quantification ou l'espace entre les échantillons doit être suffisant sans être excessif.

Moyenne mobile de 2N+1 échantillons successifs :

$S = (2N+1).H = \Sigma \exp(jn\omega Te)$ pour n variant de -N à N.

$S = \Sigma \exp(j\omega Te)^n = \{\exp[-j2\pi fNTe] - \exp[j2\pi f(N+1)Te]\} / [1 - \exp(j2\pi fTe)]$

En multipliant haut et bas par $\exp(-j\pi fTe)$:
$S = \{\exp[-j\pi f(2N+1)Te] - \exp[j\pi f(2N+1)Te]\} / [\exp(-j\pi fTe) - \exp(j\pi fTe)]$

Finalement :
$S = \{-2j.\sin [\pi f(2N+1)Te]\} / [-2j.\sin (\pi fTe)]$ donc $S = \{\sin [(2N+1)\pi fTe]\} / [\sin (\pi fTe)]$

Somme de 2N échantillons successifs :

$S = \Sigma \exp(jn\omega Te)$ pour n variant de $-N + ½$ à $N - ½$.

$S = \Sigma \exp(j\omega Te)^n = \{\exp[j\pi f(1-2N)Te] - \exp[j\pi f(2N+1)Te]\} / [1 - \exp(j2\pi fTe)]$

En multipliant haut et bas par $\exp(-j\pi fTe)$:
$S = \{\exp[-j2N\pi fTe] - \exp[j2N\pi fTe]\} / [\exp(-j\pi fTe) - \exp(j\pi fTe)]$

Finalement $S = [-2j.\sin (2N\pi fTe)] / [-2j.\sin (\pi fTe)]$ donc $S = [\sin (2N\pi fTe)] / [\sin (\pi fTe)]$

Somme de N échantillons successifs :

En comparant les deux derniers résultats, il vient : $S = [\sin (N\pi fTe)] / [\sin (\pi fTe)]$
Le retard sera de $½(N - 1)Te$ donc le retard angulaire sera de $(N - 1)\pi fTe$.

La limite quand f tend vers 0 vaut bien N.

Influence du nombre d'échantillons et de Te

Pour une infinité d'échantillons sur une demi période positive, la moyenne vaut $2A/\pi$.
Si on double le nombre d'échantillons ou Te, pour garder la même valeur moyenne, la période du signal devra être double.
Donc, au delà de 4 échantillons successifs, on peut considérer que la fréquence de coupure est inversement proportionnelle au nombre d'échantillons additionnés (et proportionnelle à Fe).
La formule générale le confirme : l'atténuation dépend essentiellement du numérateur (Il varie N fois plus vite) donc fc est bien proportionnelle à fe et quasiment divisée par N.

Fréquence de coupure

Avec N suffisamment élevé, la coupure se trouve aux environs de $N\pi fTe = 1,39$, soit $fc \approx 0,44fe/N$

Fréquence maximale

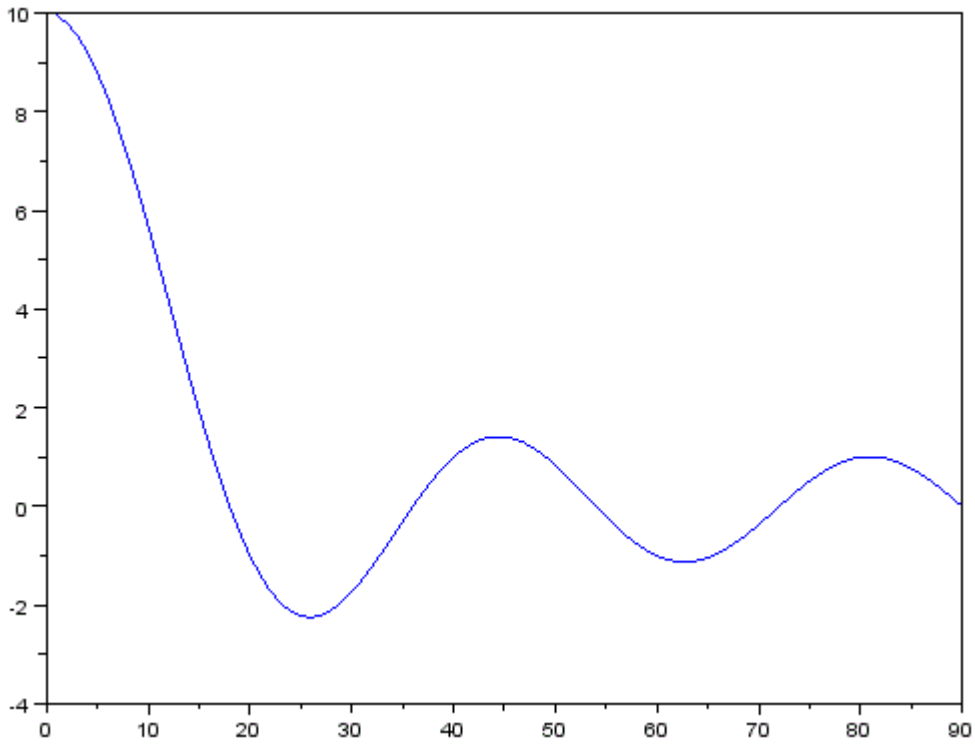
$f_max = ½$ fe donc l'angle πfTe est limité à $\pi / 2$, soit 90°

Fréquences annulant le gain

$N\pi fTe = k\pi \Rightarrow f = k.fe/N$

Visualisation

La courbe suivante donne la réponse en fréquence d'un moyenneur pour N = 10
L'équation est donc sin (10θ) / sin θ pour θ variant de 0 à 90°.
La fréquence est donnée par f/fe = θ/180



Commentaires

La coupure se trouve à θ = 180x0,44/10 soit environ 8°
La première annulation se trouve à θ = 18°, mais le gain va jusque 22% (-13dB) à 27°

Il serait donc intéressant d'avoir une idée de la pente à 13°

sin (120) / sin (12) = 4,165
sin (140) / sin (14) = 2,657

Soit un rapport de 1,5677 pour f variant dans un rapport de 14/12.

Ce qui fait un rapport de 7,56 soit 17,5dB sur un octave !!

Pour N = 100 et θ variant de 0 à 9°, la courbe est sensiblement la même.
La fréquence de coupure est bien dix fois plus faible, mais la première fréquence d'annulation aussi.
Il s'ensuit que le rapport reste inchangé.
La coupure est franche, mais l'atténuation hors bande est mauvaise.

Dérivateur

S = ΔE permet d'avoir la dérivée.
Si on veut S = jωτE avec τ = constante de temps du dérivateur, il suffit de prendre l'équation différentielle correspondante (S = τdE/dt) et de la traduire par S = τ ΔE/Te...

Transformée en Z :

1/z exprime un retard.

Si $e(z) = 1 + 2/z$ et $h(z) = 3 + 2/z + 1/z^2$
la première impulsion d'entrée (1) aura une réponse h(z) en sortie.
la 2ème (2/z) aura une réponse double et retardée, c'est à dire 2h(z)/z

D'après le théorème de convolution, $s(z) = h(z)+2h(z)/z = (1+2/z).h(z)$ donc $s(z) = e(z).h(z)$

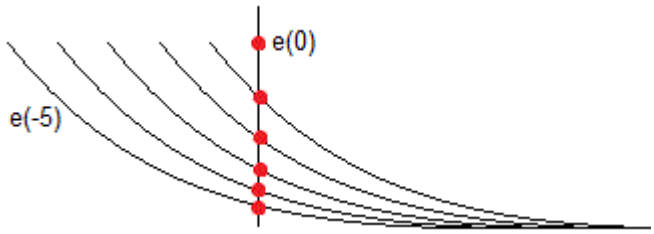
Réponse impulsionnelle et coefficients

Pour un filtre passe bas du 1er ordre de réponse $\exp(-t/\tau) /\tau$, on obtient pour une impulsion :

$S(0) = 1$
$S(1) = \exp(-Te/\tau)$
$S(2) = \exp(-2Te/\tau)$
$S(3) = \exp(-3Te/\tau)$

Soit $S = e(0) + \exp(-Te/\tau).e(-1) + \exp(-2Te/\tau).e(-2) + \exp(-3Te/\tau).e(-3)$

D'un point de vue graphique :



Par convolution des échantillons d'entrée avec la réponse impulsionnelle d'un filtre quelconque, on obtient le signal filtré.

Pour un échelon, la valeur instantanée sera :
$S(N) = \Sigma \exp(-nTe/\tau)$ pour n variant de 0 à N-1
$S(N) = \Sigma \exp(-Te/\tau)^n = [1-\exp(-NTe/\tau)] / [1-\exp(-Te/\tau)]$

On reconnaît la réponse indicielle $1-\exp(-t/\tau)$
La valeur finale pour N élevé vaut : $S(\infty) \approx 1 / [1-\exp(-Te/\tau)]$

Donc la formule pour un filtre passe bas élémentaire de gain unitaire sera :
$S = [1-\exp(-Te/\tau)].[e(0) + \exp(-Te/\tau).e(-1) + \exp(-2Te/\tau).e(-2) + \exp(-3Te/\tau).e(-3)]$

Si de plus Te tend vers zéro, $S(\infty)$ tend vers 1 donc la formule approchée sera :
$S = e(0) + \exp(-Te/\tau).e(-1) + \exp(-2Te/\tau).e(-2) + \exp(-3Te/\tau).e(-3)$

Vu autrement, si $e(z) = 1 + 2/z$ et $h(z) = 3 + 2/z + 1/z^2$:

- la première impulsion d'entrée (1) aura une réponse h(z) en sortie
- la 2ème (2/z) aura une réponse double et retardée, c'est à dire 2h(z)/z.

	n	0	1	2	3
3	e(n)	1	2		
2	e(n-1)		1	2	
1	e(n-2)			1	2
	s(n)	3	8	5	2
1		3	2	1	
2/z			6	4	2

D'après le théorème de convolution, $s(z) = h(z)+2h(z)/z = (1+2/z).h(z)$

Donc plus généralement on peut écrire : $s(z) = e(z).h(z)$

Pour la réponse impulsionnelle d'un passe-haut du 1er ordre :

$H(p) = p\tau/(1+p\tau) = (1+p\tau-1)/(1+p\tau) = 1-1/(1+p\tau)$

$S(p) = E(p).H(p)$, avec $E(p) = 1$ donc $S(p) = H(p)$

$s(t) = \delta(t) – U(t).\exp(-t/\tau) /\tau.$

La réponse du filtre ne se limite donc ni au régime impulsionnel, ni au filtrage passe-bas.

A un coefficient près, pour une réponse impulsionnelle f(t), la forme générale sera donc :
$S = \Sigma f(nTe).e(-n)$ avec n variant de 0 à autant de valeurs que l'on souhaite.

<u>Réponse fréquentielle et impulsionnelle</u>

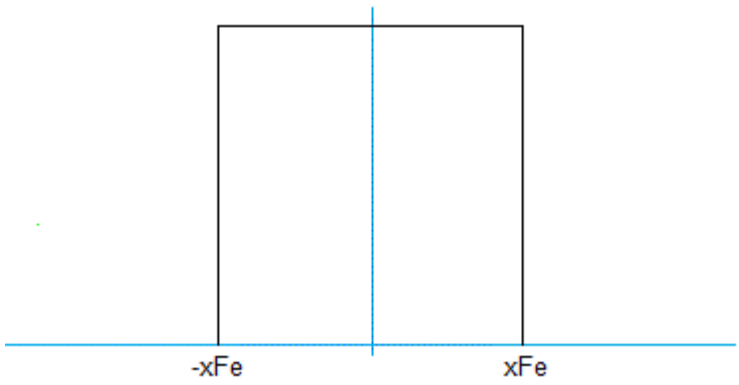
Prenons le passe-bas élémentaire de réponse impulsionnelle $\exp(-t/\tau) /\tau$

Appliquons la transformée de Fourier $Y(\omega) = \int x(t).\exp(-j\omega t)dt$
$Y(\omega) = (1/\tau) \int \exp(-t/\tau–j\omega t)dt = (1/\tau) / [(1/\tau) + j\omega] = 1/(1+j\omega\tau)$

Nous reconnaissons la réponse fréquentielle.

<u>Réponse impulsionnelle optimale</u>

L'idée est de partir du filtre parfait :
- gain unitaire dans la bande passante
- gain nul hors bande
- zone de transition infiniment étroite



La transformée de Fourier inverse de ce filtre va nous donner la réponse impulsionnelle optimale.

$y(t) = \int X(\omega).\exp(j\omega t)d\omega$

$= 2\pi \int \exp(2\pi jft)df$ pour f variant de -xfe à xfe

$= (-j/t)[\exp(2\pi jxfe.t) – \exp(-2\pi jxfe.t)]$

$= (-j/t)[2j.\sin(2\pi xfe.t)]$

$= 2\sin(2\pi xfe.t) / t$

Pour un passe-bande de fréquence centrale fo et de bande passante xfe, il faut multiplier par cos $\omega_0 t$:
$y(t) = 2 (\cos \omega_0 t).\sin(2\pi xfe.t) / t$

Pour un passe-haut qui démarre à f_min :
- $f_0 + xfe/2 = fe/2$
- $f_0 – xfe/2 = f_min$

Soit :
- $2f_0 = fe/2 + f_min$
- $xfe = fe/2 – f_min$

La réponse d'un passe-haut optimal est donc :
$y(t) = 2 [\cos \pi(fe/2 + f_min).t].\sin[\pi(fe – 2f_min).t] / t.$

Filtre amélioré

Pour la réponse impulsionnelle d'un passe-bas du 2ème ordre à amortissement unitaire :

$H(p) = 1/(1+p\tau)^2 = 1/[\tau^2(p+1/\tau)^2]$

$s(t) = U(t).t.\exp(-t/\tau) /\tau^2.$

La différence avec un 1er ordre se traduit par une réponse impulsionnelle qui monte progressivement, puis redescend à zéro.

C'est pourquoi dans la pratique, on effectue une symétrie des coefficients du filtre optimal.

Coefficients d'un filtre optimal

La liste des coefficients est donnée par y(nTe).

Pour un passe-bas : $Cn = 2\sin(2\pi xfe.nTe)/(nTe)$, soit $Cn = 2\sin(2\pi xn)/(nTe)$

Si x = ½ (Shannon) : $Cn = 2\sin(\pi n)/(nTe)$

Pour un passe-bande : $Cn = 2(\cos n\omega oTe).\sin(2\pi xn)/(nTe)$

Pour un passe-haut : $Cn = 2 [\cos \pi(n/2 + nTe.f_min)].\sin[\pi(n – 2nTe.f_min)] / (nTe)$

En pratique, le nombre de coefficients est fini. En tronquant la liste des coefficients, on obtient des dépassements de chaque côté de la fréquence de coupure.

Pour retrouver une réponse acceptable, on utilise une fenêtre temporelle.
Les Cn seront pondérés par une liste de coefficients : C'n = Wn.Cn

La fenêtre de Hamming est très utilisée : $Wn = 0,54 + 0,46 \cos (n\pi/N)$

Changement du nombre d'échantillons

Décimation

La décimation signifie sous-échantillonnage. Un CD audio délivre 44.100 échantillons par seconde, alors que 22.050 échantillons peuvent suffire à certains moments d'une musique pauvre en aigus...
On réalise alors une compression audio, qui permet de mettre plus de musiques sur le même support.

Pour diviser par n le nombre d'échantillons, deux étapes sont nécessaires :

- Supprimer les éventuelles fréquences qui ne pourront plus être codées.
- Prendre un échantillon sur n.

La première étape est réalisée par un filtre passe-bas qui coupe à 22.050/n.

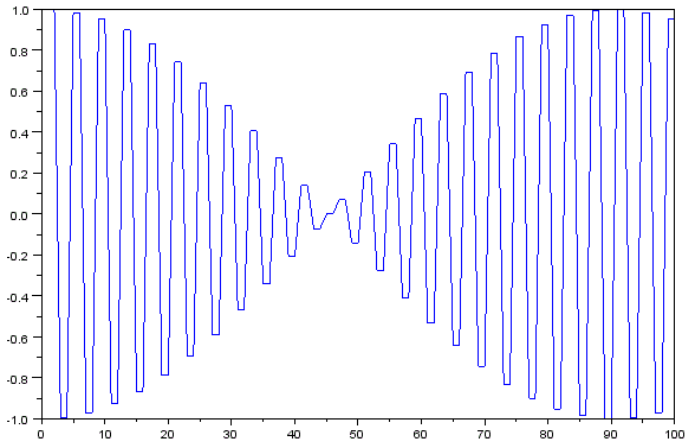
Sur-échantillonnage

Ici le but est de multiplier le nombre d'échantillons, par exemple au moment de la restitution du signal.

Pour doubler le nombre d'échantillons, on alterne un échantillon avec un zéro, puis on utilise un filtre passe bas optimal, dont la transition se trouve à la moitié de la fréquence d'échantillonnage de départ.

Dans le cas d'un signal codé au départ avec 48.000 échantillons par seconde, pour multiplier le nombre d'échantillons par m, on insère m – 1 zéros, puis on supprime les fréquences supérieures à 24.000 Hz.

Le graphe suivant montre un sinus échantillonné tous les 176° (très proche de la limite des 180°).
Il apparaît alors un battement : Il faut donc un filtre idéal pour retrouver une amplitude constante.



Ré-échantillonnage

Pour passer de 48.000 échantillons à 32.000, il faut supprimer les fréquences supérieures à 16 kHz.
Plus généralement, on peut multiplier le nombre d'échantillons par m/n par trois étapes :

- Multiplication par m
- Filtrage
- Division par n

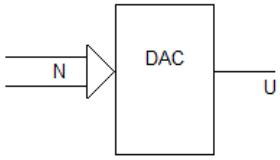
Il est inutile de filtrer deux fois : C'est le plus restrictif qui l'emporte.
Si m < n, la fréquence de coupure sera 24.000.m/n.
Si m > n, la fréquence de coupure reste plafonnée à 24 kHz.

Référence

Traitement numérique du signal – simulation sous matlab. M. Charbit / Éditions Hermes 1998.

Convertisseur Numérique/Analogique :

Un mot binaire de N bits est converti en une tension U (ou un courant I).

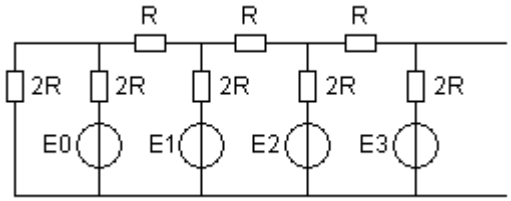


U = q N avec q le quantum (variation moyenne de tension correspondant à une incrémentation).

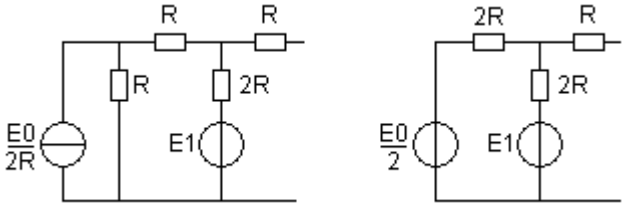
q = r E avec r la résolution ($r = 1/2^n$). E est la tension pleine échelle. En résumé, $U = E \times N / 2^n$.

Cette tension n'atteint jamais E, car la valeur maximale de N vaut $2^n - 1$.

Elle peut être générée par des capacités ou un réseau R/2R :



La première source peut être modélisée par une source de courant Eo/2R avec 2R en parallèle
Ainsi, les 2 résistances de 2R sont équivalentes à une résistance R.
Donc ces 3 premiers dipôles peuvent être modélisés par une source de tension R(Eo/2R) = Eo/2 et une résistance série R, qui devient 2R avec la résistance suivante.



Donc le courant de court-circuit créé par les 2 premiers générateurs vaut $(Eo/2)/2R + E_1/2R$
La résistance en parallèle vaut R, donc $Eth = Eo/4 + E_1/2$, et avec la résistance suivante $Rth = 2R$
Donc les 3 premiers générateurs débitent $In = (Eo/4 + E_1/2)/2R + E_2/2R$ dans $Rn = R$
Donc ils sont équivalents à $Eth = Eo/8 + E_1/4 + E_2/2$ et $Rth = 2R$
Donc la fem de ces 4 générateurs vaut $E_3/2 + E_2/4 + E_1/8 + Eo/16$

PWM

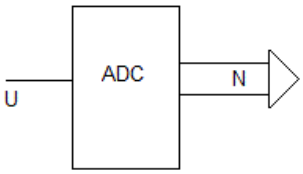
Une PWM génère un signal rectangulaire dont la valeur moyenne dépend du rapport cyclique α.
L'ondulation du courant ΔI dans la self L d'un hacheur série en régime continu, alimenté par une tension Ue vaut : $\Delta I = (1 - \alpha)\alpha T Ue/L$. A fréquence constante, elle est maximale pour $\alpha = ½$.

L'idéal est donc d'avoir une fréquence maximale à 50%, et une fréquence plus basse entre 0 et 12,5% ou entre 87,5% et 100%, pour avoir des impulsions suffisamment larges pour augmenter le rendement, la précision et la résolution :

α	T
<1/128	4096
<1/32	2048
<1/8	1024
<7/8	512

Convertisseurs Analogique/Numérique :

Une tension U est convertie en un mot binaire de N bits.



Les CAN peuvent être (semi)parallèles, à approximations successives, double rampe ou delta-sigma.
La valeur numérique est donnée par : $N = 2^n U/E$. U étant la valeur par défaut.

CAN à approximations successives :

Il s'agit d'un CNA, avec un comparateur et une logique câblée.
C'est le même principe que les balances d'autrefois :

- On essaye 2Kg. Si c'est trop lourd, on l'enlève.
- Puis on ajoute 1Kg. Si c'est trop lourd, on l'enlève.
- Puis on ajoute 500g. Si c'est trop lourd, on l'enlève.
- Etc…

CAN double rampe :

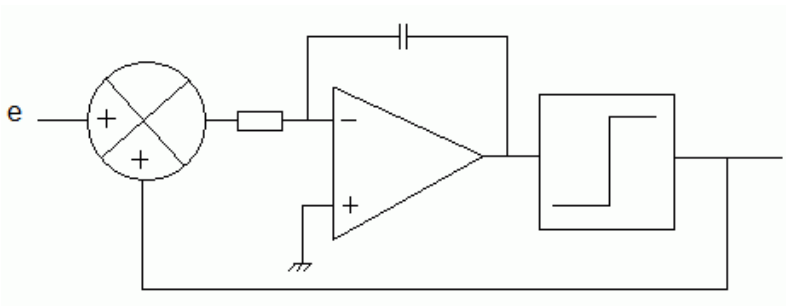
Ex : ICL7106. Deux tensions sont envoyées sur un intégrateur :

- La tension moyenne à mesurer (e) pendant 2^nT
- puis une tension de référence opposée (V) pendant NT

$2^n.e = N.V$ donc si on veux afficher cette tension : $e = V.N/2^n$.

Convertisseur delta-sigma :

C'est un convertisseur analogique/numérique basé sur un système bouclé, suivi d'un compteur :



Avec un comparateur, il est très précis, mais très lent par rapport à la fréquence du compteur.
Le comparateur donne un signal rectangulaire dont la valeur moyenne est égale à la tension d'entrée...
En comptant le nombre de 1 et de 0, on obtient la valeur moyenne donc l'image de la tension d'entrée.

La sortie de l'intégrateur monte autant qu'elle descend donc :
$-(e - V)(1 - \alpha) = (e + V)\alpha$, donc $e = V(1 - 2\alpha)$ avec $-V < e < V$ et $\alpha = T+ / T$.

Dans les convertisseurs plus performants, le comparateur est remplacé par un convertisseur analogique/numérique et numérique/analogique de résolution moindre.
Par exemple la somme de 256 octets va donner une valeur de 16 bits...

CAN parallèle :

Il s'agit de faire $2^n - 1$ comparaisons simultanées. C'est donc le plus rapide.
lorsque le signal d'entrée évolue, les bits de la valeur numérique doivent changer un par un, pour éviter les erreurs de conversion (code Gray).

Une conversion 12 bits s'effectue en deux temps :
- d'abord une approximation grossière (les six premiers bits)
- puis une approximation fine de la différence entre la valeur réelle et la valeur grossière.

Convertisseur parallèle 4 bits :

Les équations sont :

$S_3=E_8$ $S_2=E_4.E_{12}/$ $S_1=E_2.E_6/+E_{10}.E_{14}/$
$So=E_1.E_3/+E_5.E_7/+E_9.E_{11}/+E_{13}.E_{15}/$

La conversion en binaire naturel s'effectue de la manière suivante :
$N3=S3$ $N2=S3 \oplus S2$
$N1=N2 \oplus S1$ $No=N1 \oplus So$

E15,,,			,,,E1	S3,,,S0
000	0000	0000	0000	0000
000	0000	0000	0001	0001
000	0000	0000	0011	0011
000	0000	0000	0111	0010
000	0000	0000	1111	0110
000	0000	0001	1111	0111
000	0000	0011	1111	0101
000	0000	0111	1111	0100
000	0000	1111	1111	1100
000	0001	1111	1111	1101
000	0011	1111	1111	1111
000	0111	1111	1111	1110
000	1111	1111	1111	1010
001	1111	1111	1111	1011
011	1111	1111	1111	1001
111	1111	1111	1111	1000

Compression logarithmique

Il s'agit de compacter par exemple 20 bits en 16 bits : 1 bit de signe, 3 bits d'exposant, mantisse 12 bits.

quantum	excursion
1	± 4096
1	± 4K - 8K
2	± 8K – 16K
4	± 16K – 32K
8	± 32K – 64K
16	± 64K – 128K
32	± 128K – 256K
64	± 256K – 512K

Interpolation :

Cette formule (issue de la formule de taylor) sert à décomposer une fonction non linéaire en arcs de parabole :
$g(n\tau+t) = g(n\tau) + t\{g[(n+1)\tau] - g[(n-1)\tau]\}/(2\tau) + t^2\{g[(n+1)\tau] - 2g(n\tau) + g[(n-1)\tau]\}/(2\tau^2)$ avec $|t| < \tau/2$

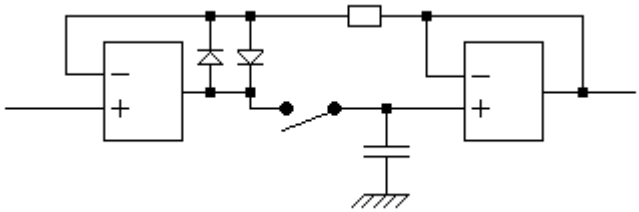
Avec une valeur codée sur 10 bits, on peut faire 32 arcs de 32 points, à partir de 33 valeurs...

Sur-échantillonnage :

Pour avoir n bits de plus, faire 4^n conversions, additionner les résultats puis décaler de n bits à droite.

Echantillonneur-bloqueur :

Il assure la stabilité d'un signal BF pendant la conversion ou la restitution (ex : LF398).



Le rebouclage sur le premier 'ampli op' permet d'éliminer l'imperfection du deuxième.
Les diodes permettent d'éviter la saturation du premier 'ampli op' pendant le blocage.

Conversion fréquence / tension

Si la période du signal est faible devant le temps de réponse souhaité, on peut utiliser un LM2907 ou un monostable déclenché sur fronts (4538) suivi d'un passe bas du 2éme ordre.

Si la période du monostable est τ , et la période du signal est T :
Umoy = E.τ/T avec τ < T et E la tension d'alim.

Calcul de spectre :

Série de Fourrier :

Toute fonction périodique peut se mettre sous la forme :

$$F(t) = Ao + \Sigma [An \cos(n\omega t) + Bn \sin(n\omega t)]$$

Avec $Ao = (1/T) \int f(t)dt = (1/2\pi) \int f(\theta)\, d\theta$

$An = (2/T) \int f(t) \cos(n\omega t)\, dt = (1/\pi) \int f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta$

$Bn = (2/T) \int f(t) \sin(n\omega t)\, dt = (1/\pi) \int f(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta$

Les intégrales étant définies sur une période complète. $\omega T = 2\pi$.

Si f(t) est impaire :
- tous les An sont nuls
- L'intégrale de Bn vaut deux fois la même intégrale sur une demi-période, à partir de 0.

Si f(t) est paire :
- tous les Bn sont nuls
- L'intégrale de An vaut deux fois la même intégrale sur une demi-période, à partir de 0.

Les amplitudes de la fréquence fondamentale et des harmoniques valent : $Cn = \sqrt{(An^2 + Bn^2)}$.

Application :

Avec j échantillons par périodes, et t la période d'échantillonnage :
$An = (2 / j) \sum f (i \tau) \cos (2\pi ni / j)$ avec i variant de 0 à j – 1.

Cette formule suppose que le calcul s'effectue sur exactement une période du signal, mais dans la réalité, la fréquence d'échantillonnage n'est pas un multiple précis de la fréquence du signal…
En général, ces calculs s'effectuent sur au moins 5 périodes, avec une 'fenêtre' temporelle…

Théorème de convolution discrète :

La sortie d'un échantillonneur-bloqueur est envoyée sur l'entrée e(t), d'un système de transmittance g.

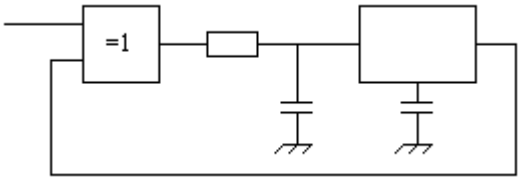
D'après un principe de superposition, la réponse à une série de paliers d'amplitudes quelconques, est la somme temporelle des réponses consécutives : $s(t) = \Sigma\, e(n\tau).g(t - n\tau)$.

Corrélation :

$W = UI \int \cos(wt).\cos(wt+\varphi).dt$ est maximal pour $\varphi = 0$

De même, si f et g sont semblables, il existe valeur de τ pour laquelle $\int f(t).g(t-\tau).dt = \int f^2(t).dt$

Boucle à verrouillage de phase :



Ex : 4046 ou LM567. La fréquence de l'oscillateur contrôlé en tension (VCO) vaut F = K.Vc.
La porte « OU exclusif » est le plus simple des comparateurs de phase. Avec 2 filtres, τ(integr) = RC.

On analyse un cycle, puis on déduit le comportement à « long » terme : Pendant la période To, l'angle du signal de l'oscillateur bouge de $2\pi F.To - 2\pi = 2\pi\,(F.To - 1)$

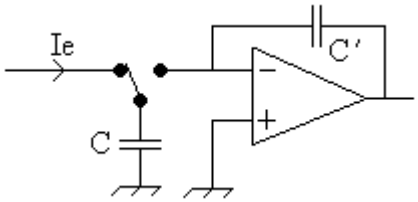
Il atteint 2π en $\Delta T = To / (F.To - 1) = 1/ (F - Fo)$ donc π en $1/ [2(F - Fo)]$
Donc Vmoy évolue de – U en $1/ [2(F - Fo)]$ donc Vmoy ' = 2U(Fo – F)

RC.Vc' + Vc = Vmoy donc RCVc" + Vc' = 2U(Fo – F) donc [RC/(2KU)]F" + F'/(2KU) + F = Fo

Ici, il s'agit
- soit d'avoir une fréquence de sortie plus stable,
- soit de synchroniser (alternateurs EDF)

Si la fréquence de retour est divisée par N par un compteur, la fréquence sera multipliée.
$Fe = Fs / N \Rightarrow Fs = N.Fe$

Filtre à capacité commutée



$Ie_moy = (C.Ve / \tau).\tau / T = f.C.Ve$ ($G_eq = f.C$)
Ie = - jwC'Vs
$\Rightarrow Vs / Ve = - f.C / (j\omega C')$

Le but est d'avoir un filtre ajustable. Exemple : MF10

Prédicteur de Smith

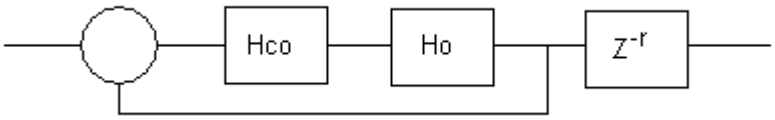
Un retard pur peut facilement rendre instable un système bouclé.

C'est le cas des processus thermiques, et même de l'être humain :
Pour régler la température de sa douche, il faut un certain temps entre deux ajustements...

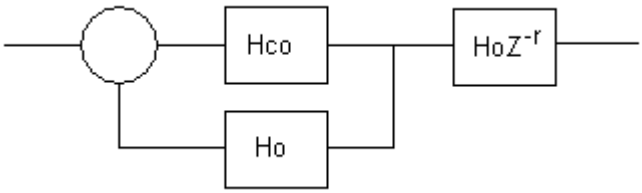
Le prédicteur de smith permet non seulement de stabiliser un asservissement avec un retard pur , mais en plus il permet l'optimisation des performances comme si ce retard n'existait pas.

Le système à asservir peut être décomposé en :
- un bloc de transmittance Ho
- un retard pur

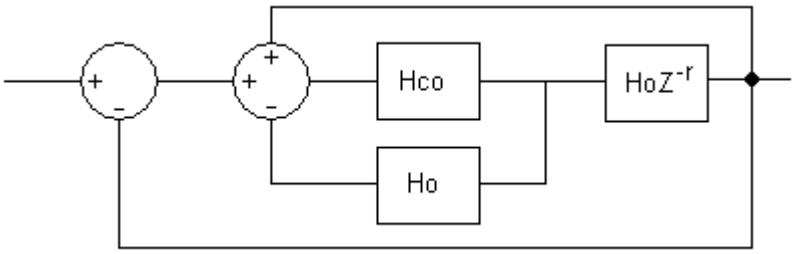
Le but est de sortir le retard de la boucle et d'insérer un correcteur Hco :



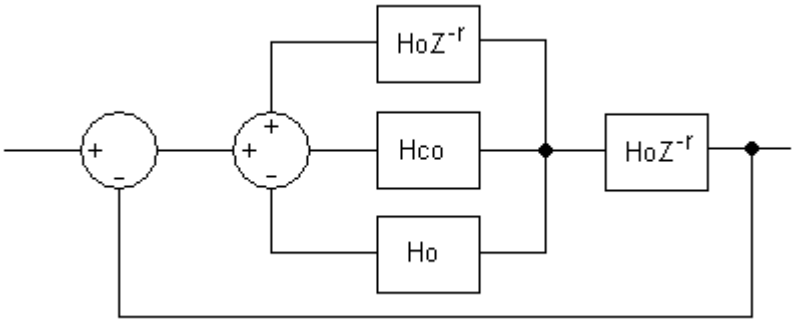
En dédoublant le bloc Ho, le processus physique apparaît :



Avec une contre-réaction nulle, le système n'est pas encore asservi, mais l'information remonte :



Puis en faisant un modèle approché du système à asservir, il apparaît le prédicteur de Smith :



Effet Doppler :

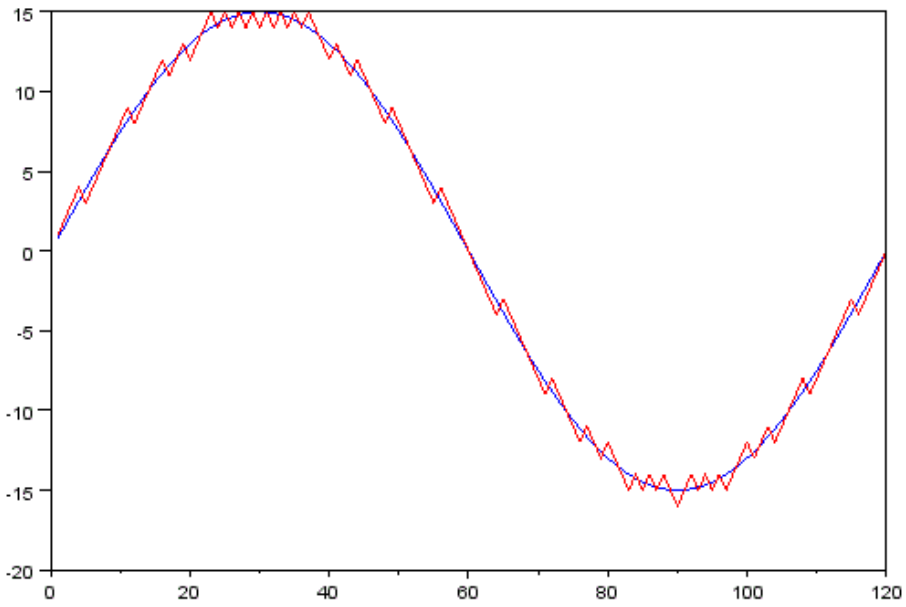
Lorsque qu'un émetteur s'approche d'un récepteur, ce dernier reçoit une fréquence plus élevée :
Supposons que l'émetteur envoie un top à $t=0$ et $x=0$; Le récepteur situé à cet instant à une distance d, recevra ce top à $t=d/c$. Le nouveau top sera envoyé à $t=T$ et $x=vT$, puis reçu à $t=T+(d-vT)/c$.
La période du signal reçu sera donc $T'=T(1-v/c)$.

Estimation de trajectoire

Si l'objet est immobile, sa vitesse est nulle donc constante. Si la vitesse est constante (et la trajectoire rectiligne), l'accélération est nulle. Si l'accélération est constante, sa dérivée (le jerk) est nulle.
On suppose le jerk constant: $A_1 - A = A - A_{-1} \Rightarrow A_1 = 2A - A_{-1} \Rightarrow V_1 - V = 2(V - V_{-1}) - (V_{-1} - V_{-2})$.
$V_1 = 3V - 3V_{-1} + V_{-2}$, ce qui donne pour les abscisses: $X_1 - X = 3(X - X_{-1}) - 3(X_{-1} - X_{-2}) + X_{-2} - X_{-3}$.
L'affixe estimée $\hat{Z}$ est donc donnée par : $\hat{Z}_1 = 4Z - 6Z_{-1} + 4Z_{-2} - Z_{-3} + k \int(Z - \hat{Z})$.

Variateur à simulation de flux

Le même principe que le convertisseur delta-sigma est utilisé pour les amplificateurs de classe D (MLI)
Le convertisseur delta-sigma est déjà présenté. L'idée est de faire le même en triphasé :
On intègre une tension positive, négative ou nulle. Les variations de la tension d'alim sont compensées.

L'application serait d'intégrer numériquement les tensions composées sur un moteur triphasé pour simuler les flux. Puis on compare ces valeurs à des consignes en quarts de parabole d'amplitude fixe et de largeur variable, enfin on pilote chaque paire de transistors à l'entrée de chaque bobine en fonction du résultat de la comparaison pour chaque phase, en attendant que la sortie soit commutée à l'opposé.
Une méthode plus évoluée serait d'alimenter la bobine qui en a le plus besoin et le 3ème pont ensuite.
L'idéal par la suite serait de trouver les bonnes formes d'onde, pour obtenir un flux bien circulaire...
On peut sur le même principe réaliser un convertisseur clampé par le neutre avec trois niveaux (NPC).

Le flux étant « micro-calculé », chaque commutation a lieu au moment opportun, garantissant la pureté des signaux, et en plus les accélérations ne présentent pas de composante continue transitoire.
En multipliant la période par la puissance consommée, on obtient le couple qui pourra être limité et qui va permettre de calculer la tension effective sur les inductances pures.
Ce sera donc l'équivalent de la commande vectorielle !